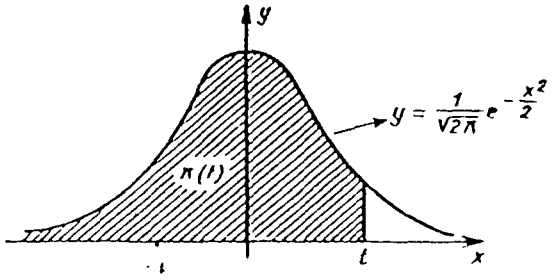
Fonction de répartition de la loi normale



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,01	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,501 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,591 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 2	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉOLOGIE APPLIQUÉE ET DE PROSPECTION MINIÈRE DE NANCY

CONCOURS 1983 — EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'attention des candidats est attirée sur le fait qu'il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la rédaction de la copie, à la présentation générale du devoir, ainsi qu'aux justifications des calculs effectués

.....
...
.

Dans tout le problème, p et q sont deux réels connus, donnés non nuls. On désigne par (u_n) la suite de terme général u_n, $[n \in \mathbb{N}]$, u_n étant réel sauf peut-être dans I,1) ci-dessous.

[redacted]

On donne la relation de récurrence (A) $u_{n+2} = p\,u_{n+1} + q\,u_n$, $[n \in \mathbb{N}]$. On admettra que l'ensemble des suites vérifiant (A) est un espace vectoriel de dimension deux. A la relation (A) on associe l'équation (B) $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$, à l'inconnue λ.

On désigne par λ_1 et λ_2 les racines de (B) quand $p^2 + 4q$ est positif, par $\lambda_0 = \frac{p}{2}$ la racine double quand $p^2 + 4q = 0$, par r et θ le module et l'un des arguments de l'une des racines imaginaires de (B) quand $p^2 + 4q < 0$.

I,1) - Déterminer les suites géométriques vérifiant (A).

I,2) - Soit (u_n) une suite vérifiant (A) dont on suppose connus les deux premiers termes u_0 et u_1, donnés réels. Exprimer sous forme réelle le terme général u_n en fonction de u_0, u_1, n et, selon les cas λ_1 et λ_2, ou bien λ_0, ou bien r et θ. (Dans le cas $p^2 + 4q = 0$, on pourra d'abord étudier la suite de terme général v_n défini par $u_n = \lambda_0^n v_n$).

Rassembler les résultats dans un tableau clair.

.../...

I

On se propose d'étudier certaines propriétés des fonctions réelles de la variable réelle x, définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout x la relation

$$(C) \qquad F(x+2) = p\,F(x+1) + q\,F(x)$$

II,1) - Montrer que la connaissance de f, restriction de F à $[0, +2[$ détermine complètement F sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, F désignera une fonction vérifiant (C).

II,2) - On pose, a étant réel.

$$F\left[a_-\right] = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x) = \alpha \qquad F\left[a_+\right] = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x) = \alpha'$$

et de même $F\left[(a+1)_-\right] = \beta \qquad F\left[(a+1)_+\right] = \beta'$.

a) On suppose $\alpha = \alpha' = F(a)$. A quelles conditions F est-elle continue en $a + 2$?

b) On suppose $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$. F peut-elle être continue en (a+2)

c) On suppose f [Cf. II,1)] continue sur $[0, +2[$. Quelle propriété doit vérifier au point x = 0 la fonction F pour que cette fonction F soit continue au point x = 2? Montrer qu'alors F est continue sur $\mathbb{R}$.

II,3) - On suppose F continue aux points a et a + 1 et pourvue en chacun de ces points de dérivées à gauche $[\alpha_1$ en a, β_1 en a+1] et à droite $[\alpha'_1$ en a, β'_1 en a+1]

a) Etudier la dérivabilité de F au point a + 2.

b) On suppose F continue et dérivable sur $]0, +2[$ pourvue d'une dérivée à droite en 0 et d'une dérivée à gauche en +2. Quelles propriétés doit vérifier en 0 la fonction F pour que cette fonction F soit continue et dérivable au point x = 2 ? Montrer qu'alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

II

Soit F une fonction vérifiant la relation (C) et dont la restriction f à $[0, +2[$ est connue. Pour $x \geqslant 0$, on pose $x = X + n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $X \in [0, +1[$.

III,1) - En utilisant les résultats du I,2), donner dans chacun des cas $p^2+4q > 0$ $p^2+4q = 0$, $p^2+4q < 0$, et en fonction de f et de la partie entière E(x) du réel x, l'expression de F(x) pour tout intervalle de la forme $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$.

III,2) - Vérifier que les formules obtenues sont valables pour $x < 0$.

III,3) - On prend p = 1, q = -1.

a) Montrer qu'alors toute fonction vérifiant (C) est périodique.

b) Déterminer F sachant qu'elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa restriction f à $[0, +2[$ est une fonction polynomiale du troisième degré nulle pour x = 0 et où le terme de degré trois a pour coefficient 1.

c) La fonction F ainsi définie admet-elle une dérivée seconde en x = 2 ?

d) Montrer qu'il existe des intervalles de la forme $[n, n+1[$, $(n \in \mathbb{Z})$ sur lesquels les restrictions de F sont des fonctions polynomiales du second dégré.

e) Expliciter F sur $[-2, +4]$ et en tracer le graphique.

III

IV,1) - Déterminer un réel h tel que, pour tout x réel, on ait

$$x + 2 = h\left[(x+2)^2 - \frac{4}{3}(x+1)^2 + \frac{1}{3}x^2\right]$$

IV,2) - Déterminer une fonction G définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel la relation

$$G(x+2) = \frac{4}{3}G(x+1) - \frac{1}{3}G(x) + x + 2,$$

sachant de plus qu'elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa restriction g à $[0, +2[$ est une fonction polynomiale du troisième degré nulle pour x = 0 et où le terme de degré trois a pour coefficient 1.

On posera $F(x) = G(x) - \frac{1}{3}x^2$ et on désignera par f la restriction à $[0, +2[$ de F. Donner, en fonction de f et de la partie entière E(x) du réel x, l'expression de F dans tout intervalle de la forme $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer f. Expliciter G(x) pour $x \in [-1, +3]$ et construire son graphique